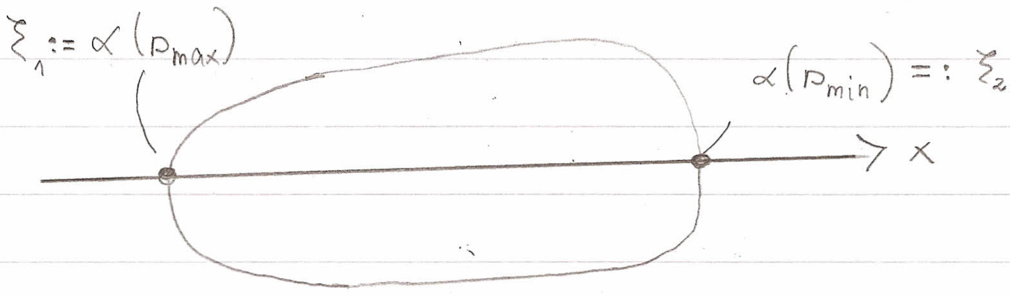
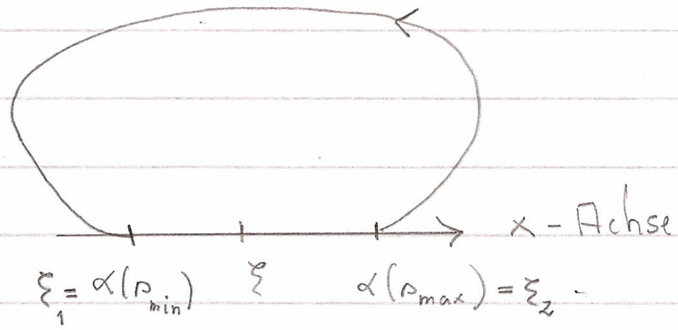
Beweis (nach Herglotz, 1913): 1.) Als stetige Funktion $[0,L] \to \mathbb{R}$ auf dem Kompaktum $[0,L]$ nimmt $\varkappa_\alpha$ seine absoluten Extremwerte an <u>mindestens zwei Stellen</u> an. (Das ist klar, falls $\min \varkappa_\alpha < \max \varkappa_\alpha$. Gilt „=", so ist jede Stelle Extremum, und man ist fertig.)
(„Man kann daher nachfolgend „<" annehmen!)
Es gibt also mindestens 2 Scheitel, s_{max} und s_{min}.

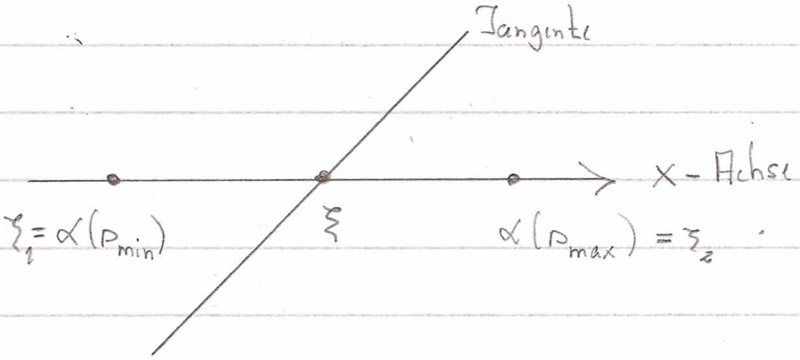
Nach Drehung und Verschiebung kann man erreichen, dass die x-Achse durch $\alpha(s_{min})$ und $\alpha(s_{max})$ geht.



2.) Man überlegt sich: <u>Die x-Achse hat keinen weiteren Punkt zwischen ξ_1 und ξ_2 mit Spur α gemeinsam</u>. Nehmen wir an, dass es doch einen dritten gemeinsamen

Punkt ξ gibt. Ist die Tangente in ξ gleich der x-Achse, so verläuft wegen der Konvexität von α ein Teil der Spur von α in dieser Geraden, was $\varkappa(p_{min}) = \varkappa(p_{max}) = 0$ ergibt, Wspr. Also schneidet die Tangente in ξ die x-Achse genau in ξ, dann liegen aber $\alpha(p_{min})$ und $\alpha(p_{max})$ auf verschiedenen Seiten der Tangente, was auch der Konvexität widerspricht.





3.) Also schneidet α die x-Achse nur in ξ_1 und ξ_2.

O.E. sei $\varkappa_\alpha(0) = \min \varkappa_\alpha$, $\varkappa_\alpha(s^*) = \max \varkappa_\alpha$,

also $0 = s_{min}$, $s^* = s_{max} \in (0, L)$.

Hätte α nur diese beiden Scheitel, so wäre

$$\varkappa_\alpha' \geq 0 \quad \text{auf } [0, s^*]$$

und

$$\varkappa_\alpha^* \leq 0 \quad \text{auf } [s^*, L]$$

(andernfalls hätte $\varkappa_\alpha$ weitere lokale Extrema!).

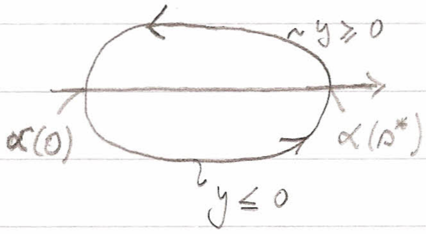
Schreibt man $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, so folgt

$$* \begin{cases} \varkappa_\alpha'(s)\, y(s) \geq 0 & \forall\, s \in [0, L] \\ \text{oder} \quad \text{—"—} \leq 0 & \text{—"—} \end{cases},$$

denn es ist nach Konstruktion

$$y(s) \geq 0 \text{ auf } [0, s^*] \text{ und } y \leq 0 \text{ auf } [s^*, L]$$

oder umgekehrt.



Mit $t_\alpha(s) = (x'(s), y'(s))$,

$n_\alpha(s) = (-y'(s), x'(s))$ und $t_\alpha'(s) = \varkappa_\alpha(s)\, n_\alpha(s)$

folgt (1te Komponente der letzten Gleichung)

$$** \quad x''(s) = \varkappa_\alpha(s)\,(-y'(s)).$$

Nehmen wir an, dass die 1te Zeile von $*$ zutrifft. Dann ist

$$0 \leq \int_0^L \varkappa_\alpha'(s)\, y(s)\, ds = -\int_0^L \varkappa_\alpha(s)\, y'(s)\, ds$$

$$\underset{**}{=} \int_0^L x''(s)\, ds = x'(L) - x'(0) = 0$$

wegen $\alpha'(0) = \alpha'(L)$. Dabei haben wir partiell integriert. Wegen der Geschlossenheit von α gibt es keine Randterme. Es folgt wegen $*$ $\varkappa_\alpha'\, y \equiv 0$ auf $[0, L]$, also $\varkappa_\alpha' = 0$. Dann ist $\varkappa_\alpha \equiv \mathrm{const}$, α ein Kreis, was unserer Annahme (nur 2 Scheitel existieren) widerspricht. Also gibt es mindestens 3 Scheitel. Dann findet man aber auch 4, da sich Max- und Min.stellen abwechseln.

$\square$

Zum Abschluss diskutieren wir die wohl berühmteste Aussage:

<u>Theorem</u> (<u>Isoperimetrische Ungleichung</u>)

Es sei C eine einfach geschlossene Kurve in $\mathbb{R}^2$ mit Länge L. A sei der Flächeninhalt des von C eingeschlossenen Gebiets. Dann gilt

$$\boxed{4\pi \, A \leq L^2}$$

mit „=" genau dann, wenn C ein <u>Kreis</u> ist.

<u>Bemerkung</u>: 1.) Denkt man sich die Länge L als fest vorgegeben, so ist also für Kurven C mit Länge $= L$ die Fläche A kleiner als $L^2/4\pi$ außer wenn C ein Kreis ist, da dann „=" eintritt. M.a.W.: Bei gegebener Länge maximieren genau die Kreise den eingeschlossenen Inhalt.

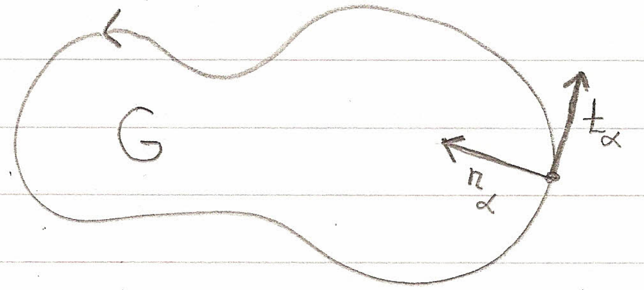
2.) Ohne den Jordanschen Kurvensatz ist unklar, was mit dem "von der Kurve umschlossenen Gebiet" gemeint ist.

Beweis: (nach Erhard Schmidt 1939)

1.) Wir leiten zunächst eine Formel für den Flächeninhalt A ab. G sei das "Innengebiet", das von der Spur der einfach geschlossenen Kurve $\alpha : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ berandet wird. (Wir nehmen α als nach der Bogenlänge parametrisiert an!)

O.E. sei α positiv orientiert, d.h. $n_\alpha(s)$ ist innere Normale (zeigt in G hinein) an ∂G.

Das äußere Normalenfeld $\nu : \partial G \to \mathbb{R}^2$ ist per Definition



$$\nu(\xi) = -n_\alpha(s), \qquad \xi = \alpha(s),$$

und es gilt der Satz von Gauß

$$(1) \qquad \int_G \operatorname{div} F \, dx\,dy = \int_{\partial G} \nu \cdot F \, d\mathcal{H}^1$$

für Vektorfelder $F : \overline{G} \to \mathbb{R}^2$. Hierbei ist rechts mit $d\mathcal{H}^1$ die Integration bzgl. des Hausdorff-Maßes gemeint bzw. mit Rückgriff auf die Parametrisierung α ist

$$\int_{\partial G} = \int_0^L \nu(\alpha(s)) \cdot F(\alpha(s)) \underbrace{|\alpha'(s)|}_{=1} \, ds$$

Schreibt man $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, so ist

$$\nu(\alpha(s)) = -n_\alpha(s) = (y'(s), -x'(s)), \text{ also}$$

$$\int_{\partial G} F \cdot \nu \, d\mathcal{H}^1 = \int_0^L \Big(F^1(x(s), y(s))\, y'(s)$$

(2) $$- F^2(x(s), y(s))\, x'(s) \Big)\, ds.$$

Man wählt in (1)

$$F(x,y) = (x,0) \text{ bzw. } (0,y) \text{ bzw. } \tfrac{1}{2}(x,y).$$

Für alle drei Fälle ist $\operatorname{div} F \equiv 1$, also

$$A = \int_G \operatorname{div} F \, dx\, dy,$$

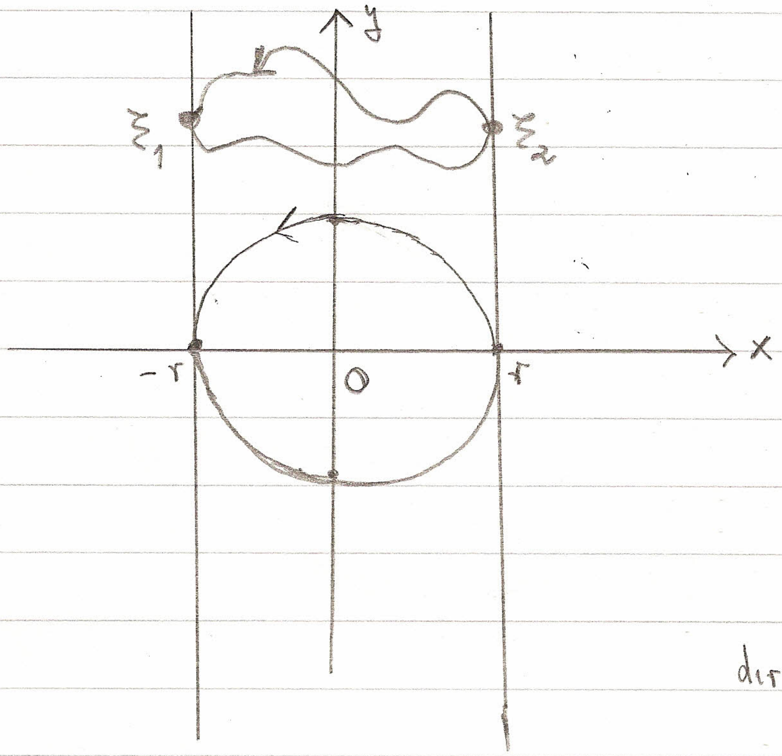
mit (2) berechnet man die Integrale über ∂G und bekommt insgesamt:

$$A = \int_0^L x(s)\,y'(s)\,ds = \int_0^L \left(-y(s)\,x'(s)\right) ds$$

(3)

$$= \int_0^L \frac{1}{2}\left(x(s)\,y'(s) - x'(s)\,y(s)\right) ds$$

2.) Wir wählen zwei Punkte $\xi_1, \xi_2 \in \operatorname{Spur}\alpha$, die den Durchmesser von $\operatorname{Spur}\alpha$ realisieren; also $|\xi_1 - \xi_2| = \operatorname{diam}(\operatorname{Spur}\alpha)$. Nach Drehung und Verschiebung können wir annehmen, dass die Situation so aussieht:



$2r = \operatorname{diam}\operatorname{Spur}\alpha$,

der Streifen $||$ ist senkrecht zum Durchmesser $\overline{\xi_1\xi_2}$,

der Kreis hat Radius r.

Es gilt: $\xi_2 = \alpha(0)$, $\xi_1 = \alpha(\ell)$ mit einem $\ell \in (0, L)$.

Die Parametrisierung $\alpha : [0,L] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ hat die Form

$\alpha(s) = (x(s), y(s))$, für den Kreis wählen wir die

Parameterdarstellung (nicht notwendig regulär oder injektiv)

$$\beta(s) = (x(s), \tilde{y}(s)) \,, \quad 0 \le s \le L \,,$$

mit
$$\tilde{y}(s) = \begin{cases} + \sqrt{r^2 - x^2(s)} \,, & 0 \le s \le l \\ - \sqrt{\ldots} \,, & l \le s \le L \,. \end{cases}$$

Die Kreisfläche ist πr^2, es ist aber nicht klar, ob die Formeln aus (3) das für die "schlechte Parametrisierung" β liefern. Wir rechnen dies deshalb nach:

$$\int_0^L \beta_1'(s)\, \beta_2(s)\, ds =$$

$$\int_0^l x'(s) \sqrt{r^2 - x^2(s)}\, ds - \int_l^L x'(s) \sqrt{r^2 - x(s)^2}\, ds \underset{\substack{\uparrow \\ u = x(s)}}{=}$$

$$\int_r^{-r} \sqrt{r^2 - u^2}\, du - \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - u^2}\, du =$$

$$-2\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-u^2}\,du = -\pi r^2 .$$

Damit folgt nun:

$$A + \pi r^2 \overset{(3)}{=} \int_0^L [x(s)y'(s) - \beta_1'(s)\beta_2(s)]\,ds =$$

$$\int_0^L (x(s), \beta_2(s)) \cdot (y'(s), -\beta_1'(s))\,ds \le \text{(Cauchy-Schwarz Ungl.)}$$

$$\int_0^L \underbrace{|(x(s), \beta_2(s))|}_{= r}\ \underbrace{|(y'(s), -\beta_1'(s))|}_{= 1}\,ds = r L .$$

Die Ungleichung zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel sagt $\sqrt{A \pi r^2} \le \frac{1}{2} A + \frac{1}{2}\pi r^2$,

so dass mit obiger Abschätzung

$$A \pi r^2 \le \left(\frac{1}{2} r L\right)^2 \iff L^2 \geq 4\pi A$$

ist.

3.) Diskussion der Gleichheit: Insgesamt tritt Gleichheit ein, wenn

i.) Gleichheit in der AMG Ungl. vorliegt (, also $A = \pi r^2$)

und

ii) $(x(s), \beta_2(s))$, $(y'(s), -\beta_1'(s))$ <u>positiv</u> l.a. sind
(Gleichheitsbdg. bei Cauchy - Schwarz)

Es gilt $(x(s), \beta_2(s)) = (\beta_1(s), \beta_2(s)) = -r\, n_\beta(s)$

und $(y'(s), -\beta_1'(s)) = (y'(s), -x'(s)) = -n_\alpha(s)$.

Positive lineare Abhängigkeit bedeutet $n_\alpha = n_\beta$,

mithin $t_\alpha = t_\beta$. Das ergibt $\alpha = \beta + \text{const.}$

$\square$